Бабич Злата

ІН-11.2

Варіант 3

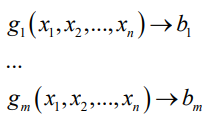
ТЕМА: Розв’язання задач оптимізації за наявності обмежень

МЕТА: навчитися розв’язувати задачі оптимізації за наявності обмежень

Теоретичні відомості. Метод множників Лагранжа для розв’язування задачі нелінійного програмування

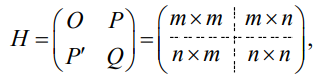
ЦФ: 

Обмеження:

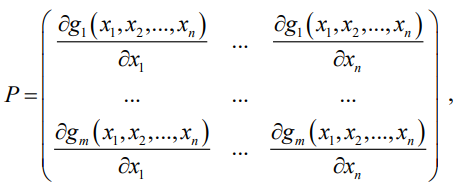
*m*

Функція Лагранжа 

Обрамлена матриця Гессе

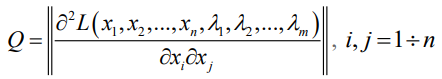


де *O* – матриця розмірності *m*×*m*, що складається з нульових елементів; *P* – матриця розмірності *m*×*n*, елементи якої визначаються так:



P′ – матриця розмірності n×m , транспонована матриця до матриці P ;

Q – матриця розмірності n×n такого виду



Ознака екстремуму

1. Точка *X*\* є точкою максимуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку *m*+1, наступні *n*−*m* головних мінорів матриці *H* утворюють знакозмінний числовий ряд, знак першого члена якого визначається множником (−1)*m*+1.
2. Точка *X*\* є точкою мінімуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку *m*+1, знак наступних *n*−*m* головних мінорів матриці *H* визначаються множником (−1)*m*.

Умова задачі

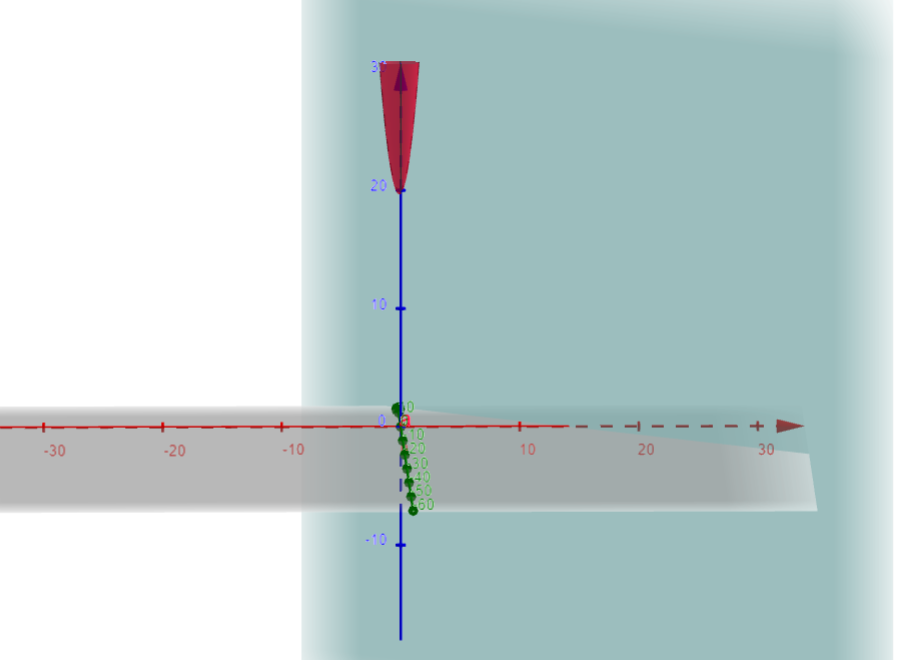
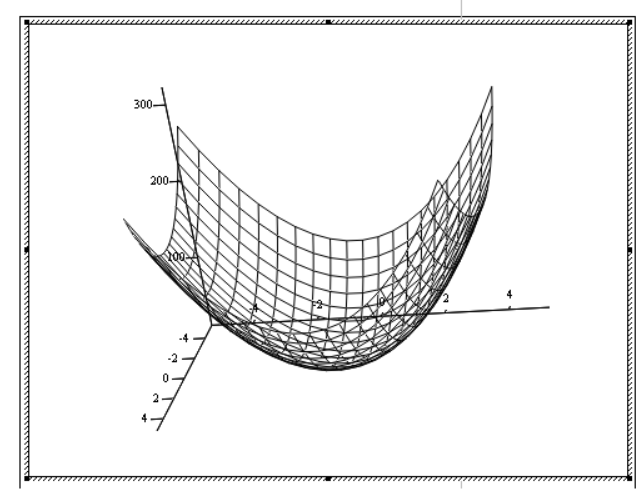
Використовуючи функцію Лагранжа, аналітично розв’язати задачу нелінійного програмування, розв’язати задачу нелінійного програмування за допомогою табличного процесору Microsoft Excel, порівняти результати

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 12 | 1 | 4 | 8 | 3 | 7 | 14 |

Обмеження:

Розв’язання

1. *Наведемо геометричну інтерпретацію задачі з нелінійною цільовою функцією і лінійним обмеженням.*

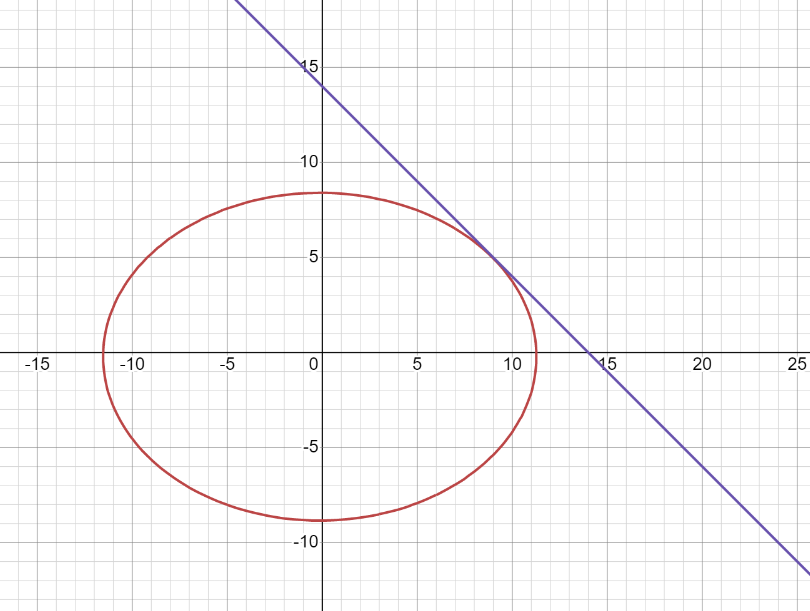
 

Область допустимих розв’язків – довільна точка прямої .

Виділимо повні квадрати цільової функції:

Отже, для квадратичної цільової функції Z лінією рівня будуть концентричні кола

, де c ≥ , з центром у точці M(-1/8; -3/14). Із збільшенням (зменшенням) числа c значення функції Z відповідно збільшується (зменшується).

Із рисунка бачимо, що мінімальне значення цільової функції досягається у точці E , яка є точкою дотику прямої до кола, а максимального кінцевого значення задача не має – цільова функція необмежено зростає ( Zmax →∞ ). Координати точки E знайдемо з системи рівнянь. Перше рівняння виражає рівність кутових коефіцієнтів прямої і лінії рівня , а друге – рівняння прямої .

Розглядаючи як неявну функцію змінної , почленно диференціюємо рівняння кола і отримуємо:

8 + 1 + 14′ + 3′ = 0 або . Прирівнюючи знайдене значення виразу до кутового коефіцієнта k = прямої (), дістанемо одне з рівнянь для визначення координат точки E .

Маємо систему рівнянь:

Звідси = 9, = 5. Отже, координати точки E(9;5) і мінімальне значення

1. *Аналітичний спосіб*

Маємо задачу на умовний екстремум (класична задача оптимізації)

1. Необхідні умови екстремуму

Складемо функцію Лагранжа

Таким чином, у точці X0(9;5,73) функція може мати умовний екстремум – стаціонарна точка.

2. Достатні умови екстремуму

Обчислимо частинні похідні другого порядку і запишемо обрамлену матрицю Гессе

Визначаємо головні мінори, починаючи з 2-го порядку (*m*+1=2)

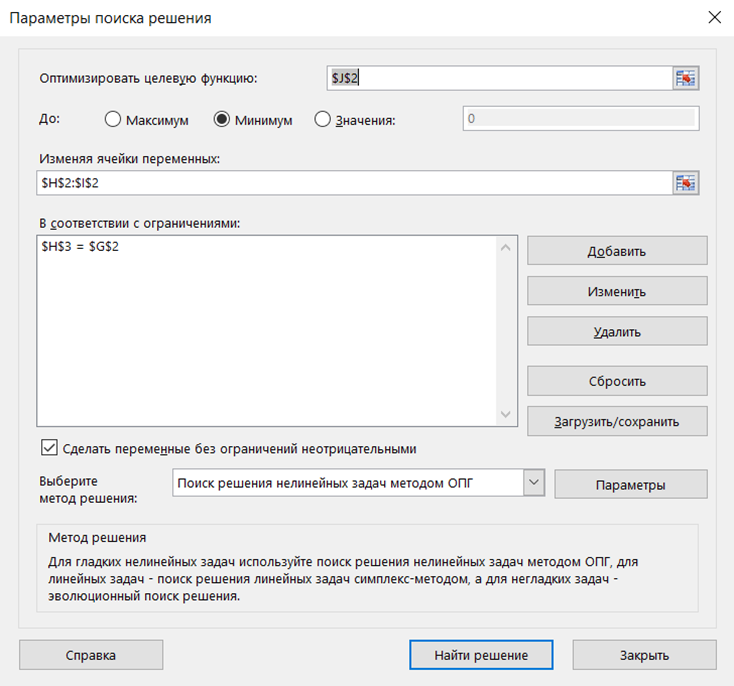
Точка *X*0(9;5;73) є точкою мінімуму, оскільки, починаючи з головного мінору порядку *m*+1=2 знак наступних *n*−*m*=1 головних мінорів матриці *H* визначається множником (−1)*m* = (−1)1 = −1.

Обчислимо значення ЦФ в цій точці . Відповідь: *Z*min = 543 при *X*0(9;5;73).

1. *Перевірка отриманого рішення засобами Microsoft Excel.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a0 | a1 | a2 | b0 | b1 | b2 | d | x1 | x2 | F |
| 12 | 1 | 4 | 8 | 3 | 7 | 14 | 9 | 5 | 543 |
|  |  |  |  |  |  |  | 14 | |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a0 | | | | | a1 | | | | | a2 | b0 | b1 | b2 | d | x1 | x2 | F |
| 12 | | | | | 1 | | | | | 4 | 8 | 3 | 7 | 14 | 9 | 5 | =A2+B2\*H2+C2\*H2^2+D2+E2\*I2+F2\*I2^2 |
|  |  |  |  |  | |  |  | =H2+I2 |  |



Висновки: Для розв’язання задачі оптимізації за наявності обмежень ми спочатку навели геометричну інтерпретацію задачі з нелінійною цільовою функцією і лінійним обмеженням. За допомогою цього ми знайшли мінімальне значення цільової функції , яке досягається у точці дотику прямої до кола (9;5), а максимального кінцевого значення задача не має – цільова функція необмежено зростає ( Zmax →∞ ). Далі ми розв’язали задачу нелінійного програмування методом множників Лагранжа і отримали аналогічне значення Після цього ми здійснили перевірку отриманого рішення засобами Microsoft Excel, використовуючи «Пошук рішення», і ми знову отримали , яке досягається при x1 = 9, x2 = 5. Таким чином, можна зробити висновок, що ми вірно розв’язали дану задачу оптимізації за наявності обмежень.